en un lloc (Cork) on ningú hi està interessat, i afegeix que només en pot parlar amb la seva dona.

El 1860 va publicar el llibre *A treatise on the calculus of finite differences* on també utilitza operadors simbòlics.

A partir de 1855 Boole va publicar sobre temes diversos: equacions diferencials, càlcul integral, astronomia, àlgebra i probabilitat, i tot això a part d'altres publicacions relacionades amb temàtiques socials. També escriví poesia i sobre qüestions de religió i filosofia. Boole estava vivint un període de molta activitat, i és just llavors quan un dia de pluja torrencial, el 24 de novembre de 1864, emprengué a peu el camí cap a la Universitat, que distava tres milles de casa seva, impartí ben xop la classe i tornà a casa amb febre alta i els pulmons afectats. No ho superà i el 8 de desembre d'aquell any, a l'edat de quaranta-nou anys, Boole morí.

Des de la perspectiva del segle XXI, George Boole és principalment celebrat com el pare de l'àlgebra del disseny de circuits digitals, però al segle XIX allò que veritablement donà fama a Boole foren els treballs on aplicava operadors simbòlics per a la resolució d'equacions diferencials i diferències finites. A l'època de Boole foren ben pocs els que apreciaren els seus treballs de construcció d'una àlgebra per a l'anàlisi matemàtica de la lògica del pensament racional.

Llibres utilitzats en aquest racó biogràfic

Per conèixer amb detall la vida de Boole cal llegir el llibre *George Boole. His life and work*, de Desmond MacHale, que és professor de matemàtiques a la mateixa universitat on va treballar Boole a Cork. Crec que és un llibre imprescindible. Jo m'he basat en aquest llibre per escriure la part biogràfica. Per escriure la part matemàtica he acudit al primer llibre de Boole *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*.

Eduard Recasens Gallart
Historiador de la ciència

Problemes

El número 36 de la nostra *SCM/Notícies* va sortir sense l'acostumada secció de problemes i, tot i ser ben conscient que gairebé mai és adequat parlar d'un mateix, penso que és oportú donar alguna mena d'explicacions als seus fidelíssims lectors i col·laboradors. En efecte, quan estava a punt d'acabar-ne la redacció i trametre-la a l'editor de la *SCM/Notícies*, un desgraciat accident de quiròfan em va foragitar del món extrahospitalari per més de quatre mesos. Ara, ja força recuperat de la destrossa, torno a estar en actiu, i aquí hi ha, altra vegada, la secció de problemes de la *SCM/Notícies*.

Comencem amb l'agraïment, meu i de tots, per a Xavier Ros Oton, (UPC, Barcelona), Joan Josep Carmona (UAB, Bellaterra), José Luis Díaz-Barrero (Barcelona-Tech), i Miquel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca), pels enunciats respectius dels problemes **A125**, **A126**, **A127** i **A128**.

Dels quatre problemes proposats en el número 35, n'hem rebut solucions per a tres. Joaquim Nadal i Vidal, professor jubilat de Llagostera, Girona, ens trameté la corresponent a l'**A121**, que publiquem. Fem constar, a més, haver rebut la de Roberto de la Cruz Moreno, del Centre de Recerca Matemàtica a Bellaterra, de qui també és la solució del problema **A122**. Pel que fa al problema **A123**, publiquem la solució de Miquel Amengual Covas, havent-ne rebut una altra d'errònia. A tots ells: moltíssimes gràcies pel seu treball i interès! Queda obert, sense resposta, el problema **A124**.

Abans d'anar pel tall: si em trameteu les col·laboracions en els formats TEX o LATEX, em fareu la feina molt més senzilla i, si ho teniu per bé, feu-me arribar els fitxers font `*.tex`. Com és obvi, però, totes les aportacions en qualsevol altre format, manuscrits inclosos, són benvingudes. L'adreça de correu és la de sempre: `carles.romero.c@gmail.com`. Fins aviat!

Problemes proposats

A125. (Proposat per Xavier Ros Oton, UPC, Barcelona.)
Sigui $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successió de nombres reals positius. Demostreu que, si la sèrie $\sum a_n$ convergeix, aleshores

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{e^2}{2} \sum_{n\geq 1} a_n.$$

A126. (Proposat per Joan Josep Carmona, UAB, Bellaterra.)
Trobeu el mínim nombre natural $m \geq 2014$ que fa que el nombre combinatori

$$\binom{m}{1714}$$

sigui múltiple de 300.

A127. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Barcelona-Tech, Barcelona.)
Siguin x, y i z tres nombres reals. Demostreu que

$$\sum_{cicle} \left(\frac{(x+1)^2+2}{y^2+z^2+2(y+z+3)} \right)^{1/2} > 2.$$

A128. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui M el punt mitjà del costat BC d'un quadrat $ABCD$, i sigui E un punt del costat AD de manera que $AE > ED$. Sigui H el punt del costat CD que fa que BE i MH siguin paral·lels. Provau que EH és tangent a la circumferència inscrita al quadrat $ABCD$.

Solucions

A121. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb $\widehat{C} = 2\widehat{B}$, sigui M el punt mitjà del costat BC, i sigui D el peu de la perpendicular des de C al costat AB. Suposem que $\overline{AM} = \overline{CD}$. Quant fa l'angle $\widehat{B}$?

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, professor jubilat, Llagostera, Girona.)
Tenim:

$$\widehat{A} = 180^\circ - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180^\circ - 3\widehat{B}$$

i, aleshores,

$$\begin{aligned}\sin \widehat{A} &= \sin 3\widehat{B} = \sin 2\widehat{B} \cos \widehat{B} + \cos 2\widehat{B} \sin \widehat{B} \\ &= 2 \sin \widehat{B} \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} \sin \widehat{B} - \sin^3 \widehat{B} \\ &= \sin \widehat{B} \left(3\cos^2 \widehat{B} - \sin^2 \widehat{B}\right) \\ &= \sin \widehat{B} \left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\cos \widehat{C} &= \cos 2\widehat{B} = \cos^2 \widehat{B} - \sin^2 \widehat{B} \\ &= 2\cos^2 \widehat{B} - 1.\end{aligned}$$

Pel teorema dels sinus,

$$\begin{aligned}a &= \frac{b \sin \widehat{A}}{\sin \widehat{B}} = \frac{b \sin \widehat{B} \left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)}{\sin \widehat{B}} \\ &= b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= a \sin \widehat{B} = b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right) \sin \widehat{B} \\ &= b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right) \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B}}\end{aligned}$$

i

$$\overline{CD}^2 = b^2 \left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)^2 \left(1 - \cos^2 \widehat{B}\right).$$

D'altra banda, pel teorema dels cosinus aplicat al triangle $\triangle MCA$,

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{ab}{2} \cos \widehat{C} = \\ &= b^2 + \left(\frac{b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)}{2}\right)^2 \\ &\quad - b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right) b\left(2\cos^2 \widehat{B} - 1\right) \\ &= b^2 + \left(\frac{b\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)}{2}\right)^2 \\ &\quad - b^2\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)\left(2\cos^2 \widehat{B} - 1\right).\end{aligned}$$

Ara podem fer $\overline{AM}^2 = \overline{CD}^2$, com diu l'enunciat, i després d'eliminar b^2 obtenim l'equació trigonomètrica

$$\begin{aligned}&1 + \frac{\left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)^2}{4} \\ &\quad - \left(4\cos^2 \widehat{B} - 1\right)\left(2\cos^2 \widehat{B} - 1\right)\end{aligned}$$

$$= \left(4\cos^2\widehat{B} - 1\right)^2 \left(1 - \cos^2\widehat{B}\right)$$

que, convenientment transformada, és

$$64\cos^6\widehat{B} - 112\cos^4\widehat{B} + 52\cos^2\widehat{B} - 3 = 0,$$

que factoritza com

$$\left(3 - 4\cos^2\widehat{B}\right)\left(-16\cos^4 + 16\cos^2\widehat{B} - 1\right) = 0$$

i hi ha dues possibilitats:

$$3 - 4\cos^2\widehat{B} = 0$$

o bé

$$-16\cos^4 + 16\cos^2\widehat{B} - 1 = 0.$$

La primera possibilitat fa $\cos\widehat{B} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, però, com que l'angle $\widehat{B}$ és agut, ha de ser $\cos\widehat{B} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i, per tant, $\widehat{B} = 30°$.
La segona possibilitat és una equació biquadrada amb solucions $\cos^2\widehat{B} = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$. Aleshores, com que l'angle $\widehat{B}$ és agut, a $\cos\widehat{B} = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ hem d'agafar la solució positiva, que correspon a $\widehat{B} = 15°$. En canvi, a $\cos\widehat{B} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$ li correspon $\widehat{B} = 75°$, que no és acceptable perquè faria $\widehat{C} = 150°$.
Amb això acabem: les solucions són, doncs,

$$\widehat{B} = 30° \quad \text{i} \quad \widehat{B} = 15°.$$

A122. (Proposat per la redacció.)
El nombre 1210 té la propietat que les seves xifres es corresponen amb el nombre de zeros (1), d'uns (2), de dosos (1) i de tresos (0) en el mateix nombre. Trobeu sis nombres més amb la mateixa propietat.

Solució: (Solució de Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra.)
Sigui n el nombre de xifres; és evident que $n \leq 10$. Denotem, d'esquerra a dreta, per $x_1, x_2, ..., x_n$ les xifres. És obvi que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \qquad (*)$$

i, a més, $x_1 > 0$.

Lema 1: $n \geq 3$.

Demostració: És immediat que n no pot ser ni 1 ni 2, ja que a partir de $(*)$ les úniques opcions són 1, 20 i 11, que no compleixen la propietat.

Lema 2: Si es compleix la propietat de l'enunciat, aleshores $x_n = 0$.
Demostració: Suposem que $x_n \geq 1$. Aleshores existeix $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_i = n - 1$. Si $i \neq 1$ i $i \neq n$ tindríem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\geq x_1 + x_i + x_n \\ &\geq 1 + n - 1 + 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Per tant, $i = 1$ o $i = n$. Però si $x_1 = n - 1$, la resta de les xifres serien 0, i no es compliria $(*)$ i, si $x_n = n - 1$, tindríem $n - 1$ xifres amb valor $n - 1$, la suma de les quals seria $(n-1)^2$, que és més gran que n, per a $n \geq 3$.
Distingim casos segons el valor de x_{n-1} per tal d'obtenir tots els nombres que compleixen la propietat de l'enunciat:

i) Si $x_{n-1} \geq 3$ tindríem almenys tres xifres amb valor $n - 2$, la suma de les quals val $3n - 6$ i, en imposar que aquesta suma no pot ser més gran que n queda que $n \leq 3$. Però n no pot ser tres, ja que aleshores $x_2 = 3$ i la suma de les xifres seria major que 3, ja que $x_1 > 0$).

ii) Si $x_{n-1} = 2$, hi ha dues xifres amb valor $n - 2$, la suma de les quals és $2n - 4$ i, perquè aquesta suma sigui menor que n s'ha de complir que $n \leq 4$. Per tant busquem nombres de 3 o 4 xifres que acabin en 20. De 3 xifres no n'hi ha, ja que no hi ha lloc per col·locar els dos 1 que necessitem; i de quatre n'hi ha només una possibilitat, el 2020.

iii) Si $x_{n-1} = 1$, tenim que una xifra és $n - 2$. Sigui j tal que $x_j = n - 2$. Tres possibilitats per a j:

iii.1) Si $j = n - 1$, aleshores $n - 2 = 1$ i, després, $n = 3$. Però és obvi que no és possible que el nombre tingui 3 xifres i acabi en 10.

iii.2) Que $1 < j < (n - 1)$. En aquest cas $x_1 + x_j + x_{n-1} \geq 1 + n - 2 + 1 = n$ i, per tant, $x_1 = 1$. L'única possibilitat és 1210.

iii.3) Que $j = 1$ implica que ha d'haver-hi $n - 2$ xifres igual a zero, però, aleshores, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n - 2 + 1 = n - 1$, i no es compleix $(*)$.

iv) Que $x_{n-1} = 0$. Aleshores s'ha de complir que $x_1 \geq 2$:

iv.1) Si $x_1 = 2$, com que $x_n = x_{n-1} = 0$, aleshores $x_i > 0, \forall i < n-1$. Per tant, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} \geq 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-3) = (n-2)(n-3)/2+1$, que és més gran que n per a $n > 5$. Però, com que $x_1 = 2$, tenim que $x_3 > 0$ i, per tant, $n \geq 5$. Després, $n = 5$, $x_1 = 2$ i $x_n = x_{n-1} = 0$, obtenint el nombre 21200.

iv.2) Si $x_1 = 3$, com que $x_n = x_{n-1} = 0$ i $x_4 > 0$, aleshores, $n \geq 6$. A més, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-4) = (n-3)(n-4)/2 + 1$, que, per $n > 7$, és més gran que n. Per tant $n = 6$ o $n = 7$. En conseqüència, $x_4 = 1$ (si $x_4 > 1$ hi hauria com a mínim dues xifres 3 que sumades a x_4 farien més que n). Amb tot això, és immediat comprovar que l'únic nombre que compleix la propietat és 3211000.

iv.3) Si $x_1 = 4$, amb un raonament anàleg a l'anterior tenim que $n = 7$ o $n = 8$, $x_5 = 1$, $x_n = x_{n-1} = 0$, i s'obté, com a única possibilitat vàlida, 42101000.

iv.4) Si $x_1 = 5$, un raonament anàleg als casos anteriors dóna el nombre 521001000.

iv.5) Si $x_1 = 6$, de la mateixa manera, ens queda el 6210001000.

iv.6) Per a $x_1 > 7$ no s'obtenen solucions vàlides.
Resumint, tots els nombres que compleixen la propietat són:

1210 , 2020 , 21200 , 3211000 , 42101000 , 521001000 i 6210001000.

A123. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.)
Trobeu totes les solucions reals de l'equació

$$\left(\sqrt[5]{x^2+3x+2} - \sqrt[5]{2x^2+5x+7} + \sqrt[5]{4x^2+x+6}\right)^5 = 3x^2 - x + 1.$$

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Posem

$$u = \sqrt[5]{x^2+3x+2}$$

$$u = \sqrt[5]{-2x^2-5x-7}$$

$$u = \sqrt[5]{4x^2+x+6}$$

i, en aquestes variables, l'equació donada és

$$(u+v+w)^5 = u^5 + v^5 + w^5.$$

En substituir això a la identitat (1)

$$\begin{aligned}(u+v+w)^5 - u^5 - v^5 - w^5 \\ = 5(u+v)(v+w)(w+u) \\ \left(u^2+v^2+w^2+uv+vw+wu\right)\end{aligned}$$

obtenim aquesta equació, equivalent i més senzilla:

$$\begin{aligned}(u+v)(v+w)(w+u) \\ \left(u^2+v^2+w^2+uv+vw+wu\right) = 0,\end{aligned}$$

que es resol d'una manera immediata, ja que l'expressió s'anul·la si, i només si, un dels factors és zero.
Així doncs, si $u + v = 0$ tindrem $u = -v$ i

$$u^5 = -v^5.$$

En substituir aquí u i v per les seves expressions, s'obté l'equació

$$x^2 + 2x + 5 = 0,$$

que no té solucions reals.
De la mateixa manera, l'equació $v + w = 0$ esdevé

$$2x^2 - 4x - 1 = 0,$$

que té les solucions $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ i $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$.
De l'equació $w + u = 0$ obtenim

$$5x^2 + 4x + 8 = 0,$$

que no té solucions reals.
Finalment, com que l'equació $u^2+v^2+w^2+uv+vw+wu = 0$ s'escriu, d'una manera equivalent,

$$(u+v)^2 + (v+w)^2 + (w+u)^2 = 0 \qquad (*)$$

les solucions reals de $(*)$ són les del sistema

$$\begin{cases} u+v=0 \\ v+w=0 \\ w+u=0, \end{cases}$$

que, pel que ja hem vist, és incompatible a $\mathbb{R}$.

Així, doncs, les solucions reals de l'equació donada són

$$\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \qquad \frac{2-\sqrt{6}}{2}.$$

Nota: Com que l'expressió $E = (u+v+w)^5 - u^5 - v^5 - w^5$ s'anul·la per a $u = -v$, conté el factor $u+v$. De la mateixa manera, $v+w$ i $w+u$ en són factors. Per tant, E conté el factor $(u+v)(v+w)(w+u)$. Atès que E és de cinquè grau, el factor restant és de segon grau i, atès que E és simètrica en u, v i w, aquest factor serà de la forma $A\left(u^2+v^2+w^2\right)+B(uv+vw+wu)$. El mètode dels coeficients indeterminats dóna immediatament $A = B = 5$. Així, doncs,

$$E = 5(u+v)(v+w)(w+u)\left(u^2+v^2+w^2+uv+vw+wu\right).$$

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Matemots

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.
Exemple: «Exclous l'ús de coordenades al pla» (9 lletres). La resposta és «descartes», ja que descartar és una forma d'excloure, i René Descartes fou un dels matemàtics que va introduir l'ús de coordenades al pla o a l'espai. En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[3]

1. Pot ser afí, projectiva o euclidiana, i diuen que requisit per entrar a l'*Ακαδημία* (9 lletres).
2. Derivada que no s'entén prou a l'examen de mig curs (7 lletres).
3. Diferència entre Cauchy i Schwarz al voltant del producte escalar (11 lletres).
4. Varietat de maneres de representar el factorial (5 lletres).
5. Incitació a provar $P(n)$ per a tota n (8 lletres).
6. Ho poden ser les àlgebres, i també les ulleres (9 lletres).
7. Entoni correctament mentre parla de la classificació de les corbes algebraiques (6 lletres).
8. Functor que mesura la resistència dels estudiants a entendre l'àlgebra homològica (3 lletres).

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

[3] Respostes als matemots: 7. moduli 4. gamma 1. geometria 3. desigualtat 8. Hom 5. inducció 6. graduades 2. parcial.